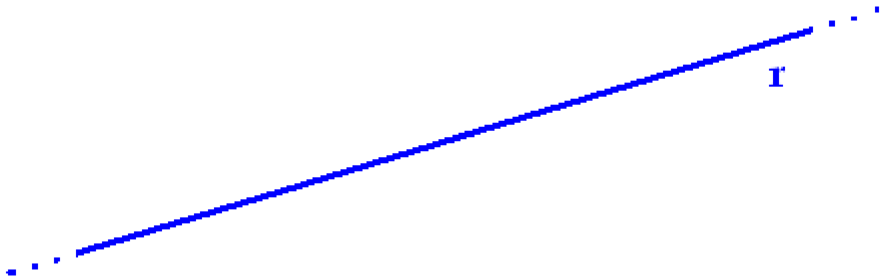
Aplicación de la geometría en la resolución de problemas

Elementos básicos de la geometría del plano

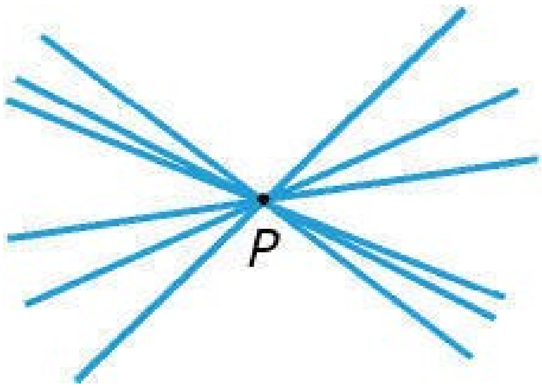
Rectas

Una recta es un conjunto infinito de puntos del plano, que están alineados en una misma dirección.

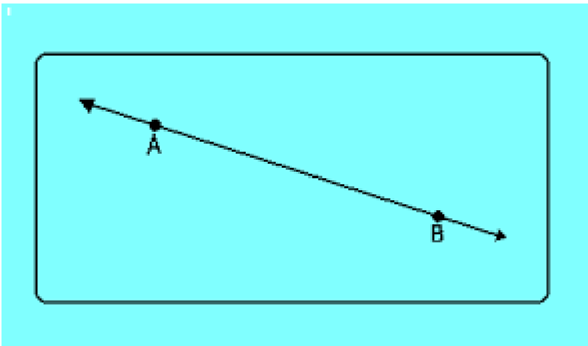
La siguiente figura nos aclara el concepto. En general a las rectas se las señala con una letra minúscula, generalmente “r”:



Siempre que quieras o necesites determinar una recta en un plano necesitarás como mínimo dos puntos que la definan. Si sólo tienes uno, es correcto decir que por ese punto pasan infinitas rectas (que formarían un haz similar al de la siguiente figura):



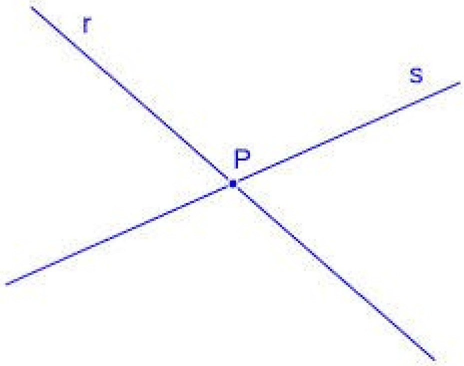
Cuando tienes definidos o señalados dos puntos cualesquiera, se dice que por ellos pasa una recta y sólo una. Dicho de otro modo: por un punto pasan infinitas rectas (figura anterior), pero por dos, sólo pasa una.



Clases de rectas

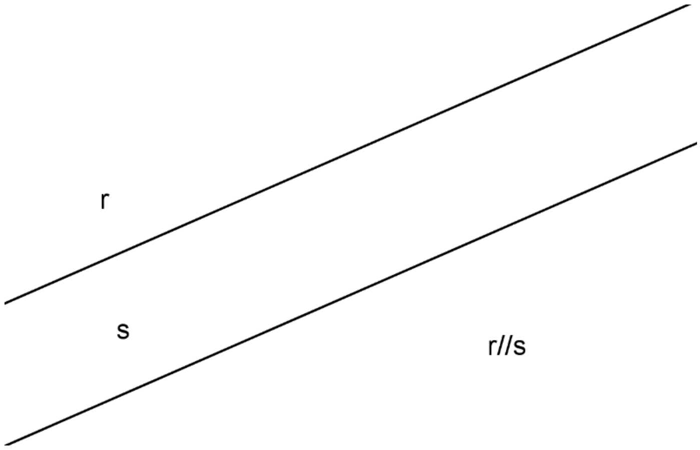
Secantes

Las rectas secantes se cortan en un punto; en este caso, las rectas “r” y “s” se cortan en el punto “P”:



Paralelas

Las rectas paralelas no se cortan en ningún punto.

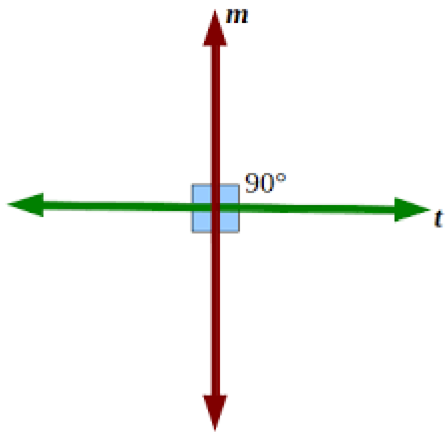


Coincidentes

Dos rectas son coincidentes si todos sus puntos son comunes.

Perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares cuando al cortarse forman cuatro ángulos iguales de 90º.

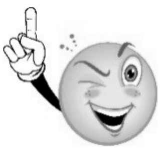


Semirrectas

Una semirrecta se define como un subconjunto de puntos de una recta, también infinito (y alineado en una misma dirección), del cual se conoce un primer punto considerado su inicio u origen y a partir del cual, la sucesión de puntos es infinita en el sentido indicado. En la imagen de abajo vemos en realidad dos semirrectas, una en cada sentido a partir del punto origen que es el punto P. Hacia la derecha, vemos la semirrecta Ps y hacia la izquierda vemos la semirrecta Pt:

Segmentos

Se define a un segmento de recta, como un subconjunto acotado (es decir que no es infinito) de puntos que pertenecen a una misma recta, que está delimitado por dos de ellos, llamados habitualmente extremos del segmento. En la imagen de abajo, estamos viendo al segmento AB, es decir aquel contenido entre los puntos A y B, siendo estos dos también parte del mencionado segmento:



82. Con ayuda de regla y escuadra traza y nombra:

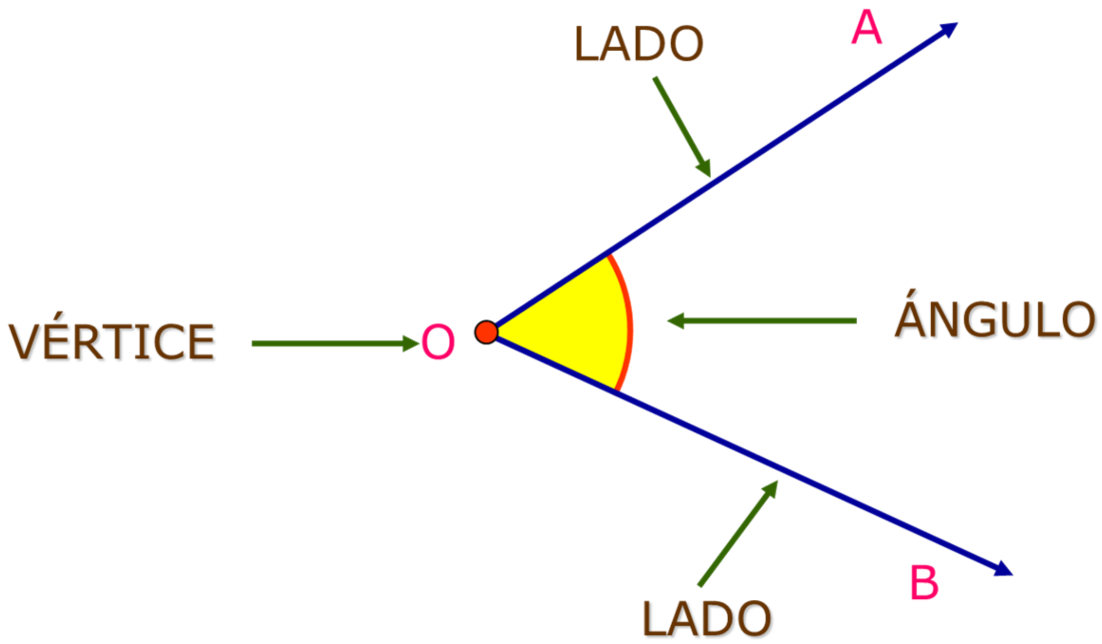
a) Dos rectas paralelas

b) Dos rectas perpendiculares

c) Dos rectas secantes

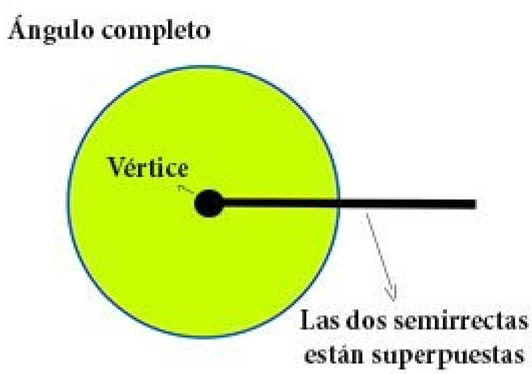
Ángulos

Decimos que un ángulo es la abertura que hay entre dos rectas (o segmentos) que se cortan en un punto llamado vértice; en esta figura podemos observar la abertura creada por las dos rectas y que representaría el ángulo formado:



Los ángulos los medimos con grados y se simboliza con el signo º (por ejemplo: 57 grados lo expresamos como 57 º).

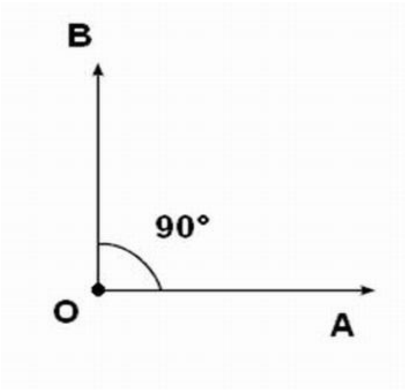
Para establecer esta medida dividimos lo que sería un ángulo completo en 360 grados (un ángulo completo es un ángulo de 360 grados), y a partir de esta definición podemos saber cuánto mide un grado; para entenderlo mejor digamos que un ángulo completo es el ángulo formado por dos rectas que estén superpuestas:



Tipos de ángulos

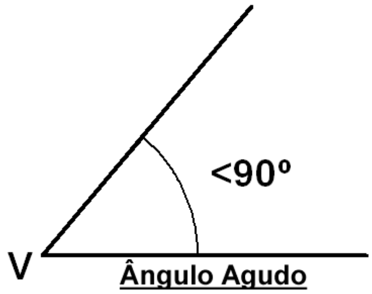
Ángulo recto

Es el ángulo formado por dos rectas dispuestas perpendicularmente; su medida es de 90 º.



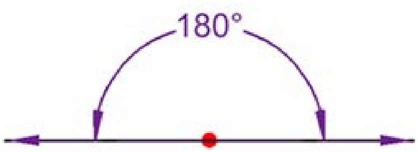
Ángulo agudo

Es un ángulo menor que un ángulo recto; su medida está entre 0 º y menos de 90 º.



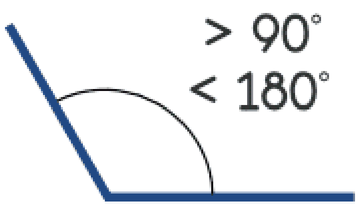
Ángulo llano

Es el ángulo formado por dos rectas planas; su medida es de 180 º.



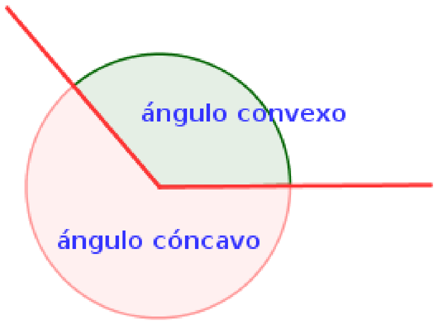
Ángulo obtuso

Es un ángulo menor que un ángulo llano pero mayor que un ángulo recto, su medida está entre más de 90 º hasta 180 º.



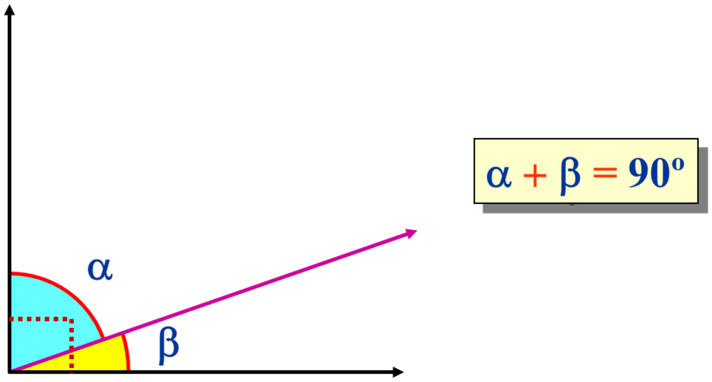
Ángulo cóncavo

Es un ángulo mayor que un ángulo llano pero menor que un ángulo completo; su medida está entre más de 180 º hasta manos de 360 º.



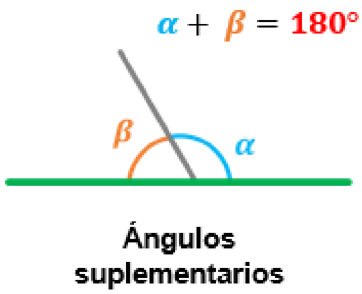
Ángulos complementarios

Ángulos complementarios son los que suman un recto (90º):



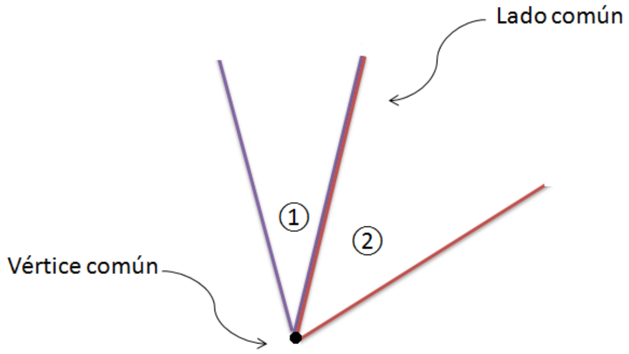
Ángulos suplementarios

Ángulos suplementarios son los que suman un llano (180º):



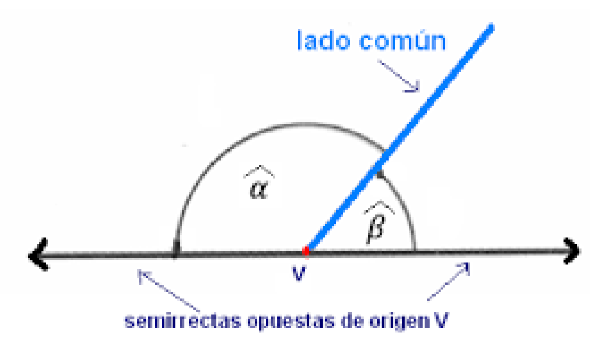
Ángulos consecutivos

Dos ángulos son consecutivos si tienen un lado y el vértice en común.



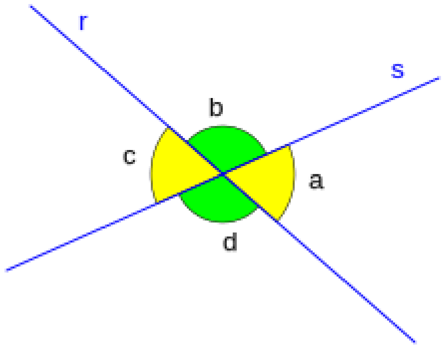
Ángulos adyacentes

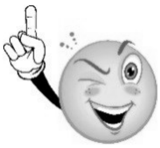
Dos ángulos son adyacentes si tienen un lado y el vértice comunes y el otro en lado en la misma línea recta.



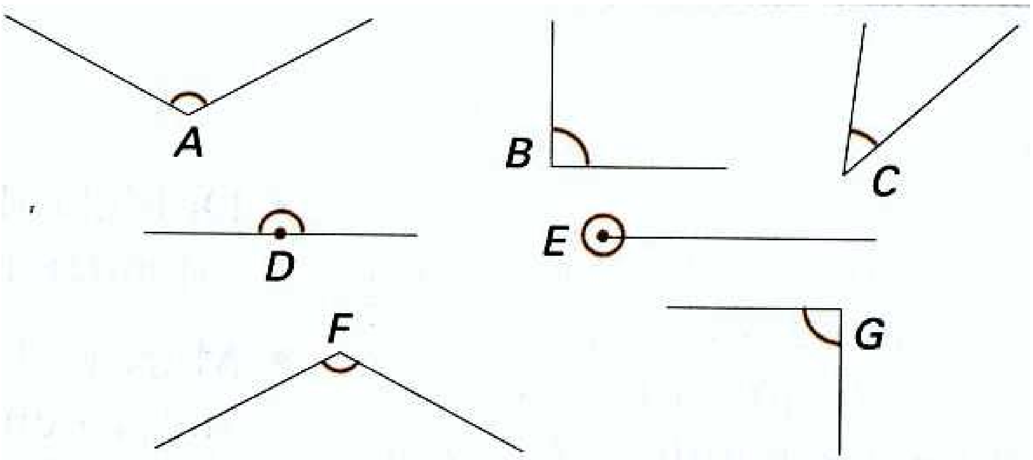
Ángulos opuestos por el vértice

Dos ángulos son opuestos por el vértice si tienen el vértice en común y los lados del uno son prolongación de los del otro ángulo.





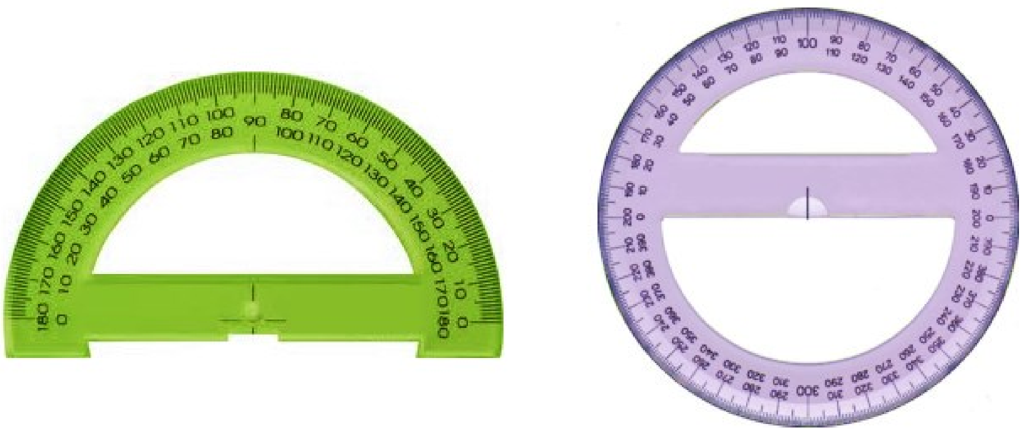
83. Di de qué clase son estos ángulos:



Medida de ángulos

Medir un ángulo significa determinar su amplitud y, para hacerlo generalmente se utiliza el transportador.

Un transportador es un instrumento en forma circular o semicircular y graduado angularmente:



Los ángulos se miden en grados sexagesimales. Un grado corresponde a la medida del ángulo que se forma cuando una circunferencia se divide en 360 partes iguales.

Los grados indican la separación de los lados del ángulo, mientras más separados están mayor es la cantidad de grados que este mide.

Para medir ángulos utilizando el transportador semicircular se debe:

1° Colocar el trazo recto del transportador sobre uno de los lados del ángulo.

2° Hacer que el punto medio de ese trazo coincida con el vértice del ángulo.

3° Observar el otro lado del ángulo y su valor según la escala angular del transportador. Si el ángulo está abierto hacia la izquierda debes fijarte en la escala externa y si está abierto hacia la derecha en la escala interna.

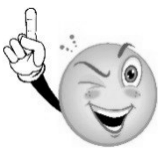
Para medir ángulos utilizando el transportador circular se debe:

1° Colocar uno de los lados del ángulo frente al 0°.

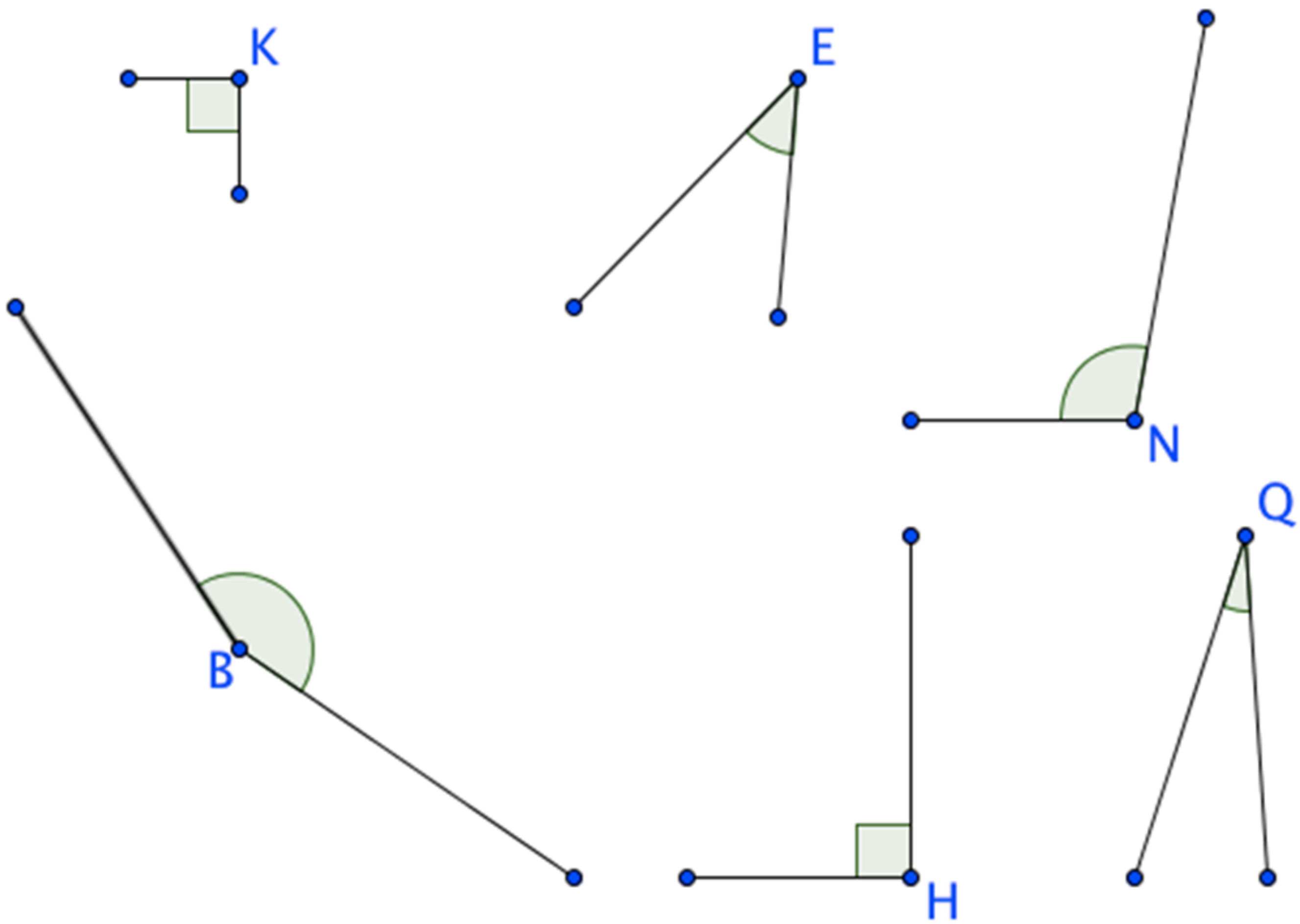
2° Hacer coincidir el centro de la circunferencia con el vértice del ángulo.

3° Observar el otro lado del ángulo y su valor según la escala angular del transportador.

Comentar asimismo que, si los lados son cortos, se alargan para poder medirlos con el transportador.



84. Mide estos ángulos con tu transportador:



Operaciones con ángulos

Suma de ángulos

Tenemos libertad para sumar ángulos, pero, ¿qué pasa si al sumarlos superamos un ángulo de 360º? Si al sumar dos ángulos superamos los 360º podemos buscar un ángulo de entre 0º y 360º y que sea semejante al de la suma.

Por ejemplo, si sumamos un ángulo de 90º más uno de 360º, obtenemos uno de 450º; tenemos que restar sucesivamente 360º hasta encontrar un ángulo de como máximo 360º:

$$450 - 360 = 90º$$

90º es un ángulo semejante a 450º

Resta de ángulos

De la misma manera que hemos definido la suma de ángulos definimos la resta de ángulos.

Veamos qué sucede si al restar varios ángulos obtenemos un valor negativo:

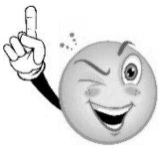
$$60º - 950º = -890º$$

Basta con ir sumando sucesivamente 360º hasta que se convierte en un ángulo entre 0º y 360º:

$$-890 + 360 = -530$$

$$-530 + 360 = -170º$$

$$-170 + 360 = 190º$$



85. Busca el ángulo semejante entre 0º y 360 º de los siguientes ángulos:

- 1328º
- -2679º

Suma y resta de ángulos en el sistema sexagesimal.

Para medir ángulos utilizamos el llamado sistema sexagesimal. La unidad de medida es el grado sexagesimal. Se representa con el símbolo ° y se define como 1/360 de un ángulo completo.

El grado sexagesimal tiene dos divisores:

- Minuto 1 minuto = 1 ´ = 1/60 parte de un grado.
- Segundo 1 segundo = 1 ´´ = 1/60 parte de un minuto.

Las unidades de este sistema aumentan y disminuyen de 60 en 60, por eso el sistema se llama sexagesimal.

Si un ángulo viene expresado en dos o tres de estas unidades, se dice que está expresado en forma compleja. En la forma incompleja de la medida de un ángulo aparece una sola unidad.

Ejemplo:

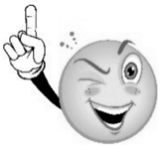
- Forma compleja: A = 56º 30 ´ 41´´ B = 20´ 28´´ C = 120º 23´´
- Forma incompleja: D = 28000´´ E = 13º F = 36´

El paso de una a otra forma se realiza mediante multiplicaciones o divisiones por 60, según haya que transformar una unidad de medida de ángulos en la unidad inmediata inferior o superior.

Ejemplo:

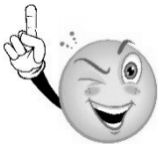
- 34º 27’ 28’’ a segundos
  34 · 3600 = 122400’’
  27’ · 60 = 1620’’
  122400 + 1620 + 28 = 124048’’
- Realizamos ahora el proceso inverso para conseguir una forma compleja:
  124048 | 60
  0404   2067’
  4 4 8
  28’’

  2067 | 60
  267   **34º**
  27’
  34º 27’ 28’’



86. Pasa a forma compleja los siguientes ángulos:

- 345’
- 3750’’



87. Pasa a forma incompleja los siguientes ángulos:

- 34’ 59’’
- 23º 27’39’’

Para sumar ángulos expresados en el sistema sexagesimal, se colocan los sumandos haciendo coincidir grados, minutos y segundos, después se suman las cantidades correspondientes a cada unidad. Si los segundos sobrepasan 60, se transforman en minutos y se suman a los minutos resultantes de la primera fase de la suma. Si los minutos sobrepasan 60, los transformamos en grados y se suman a los grados anteriormente obtenidos.

Ejemplo:

	25º	47’	33’’
+	12º	30’	50’’
	37º	77’	83’’

83’’ | 60 → Sobra 1’ para sumarlo a los 77’ y quedan 23’’
23’’   1’

77 + 1 = 78’

78’ | 60 → Sobra 1º para sumarlo a los 37º y quedan 18’
18’ 1º

37 + 1 = 38º

Así, 38º 18’ 23’’

Para restar ángulos expresados en el sistema sexagesimal, se colocan el minuendo y el sustraendo haciendo coincidir grados, minutos y segundos, después restamos. Si en alguna columna el minuendo es menor que el sustraendo, se pasa una unidad inmediatamente superior a la que presente el problema para que la resta sea posible.

Ejemplo:

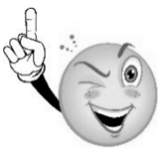
	34º	27’	31’’
-	15º	35’	43’’

Pasamos 1’ de los 27’ a los 31’’ → 31’’ + 1’ = 31’’ + 60’’ = 91’’; así:

-	34º	26’	91’’
	15º	35’	43’’

Pasamos 1º de los 34º a los 26’ → 26’ + 1º = 26’ + 60’ = 86’; así:

-	33º	86’	91’’
	15º	35’	43’’
	18º	51’	48’’



88. Calcula:

- 12º 47’ 59’’ + 3º 37’ 2’’
- 1º 47’ 3’’ – 59’ 59’’

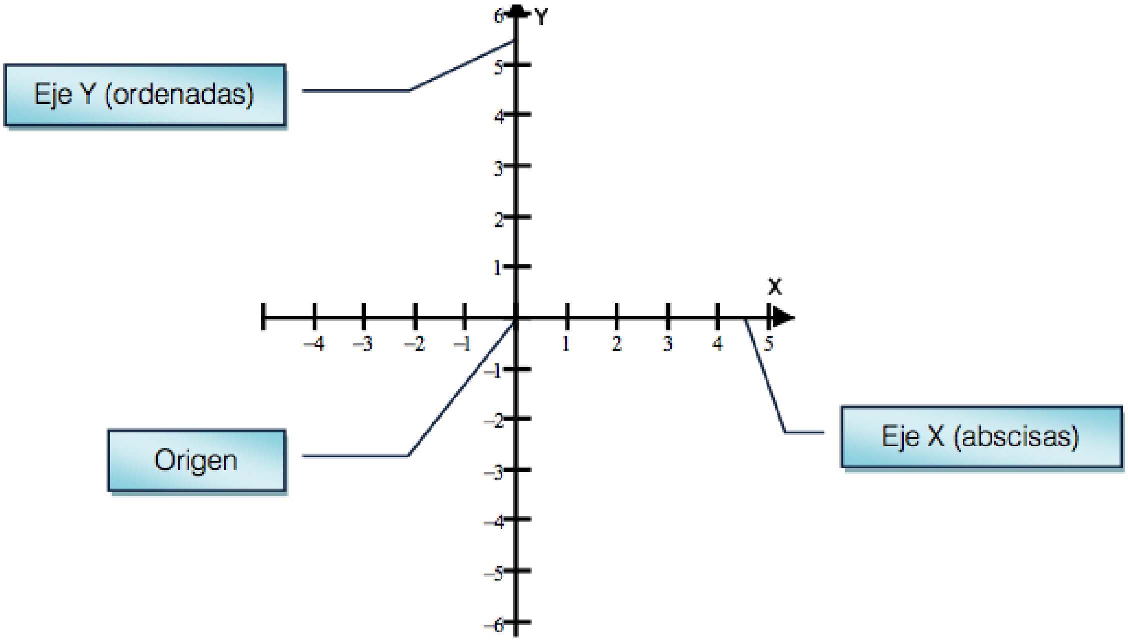
Coordenadas cartesianas

Unos ejes cartesianos son un par de rectas reales perpendiculares que nos permiten identificar los distintos puntos del plano.

Identificaremos un punto P cualquiera mediante un par de números x y y, y escribiremos

P = (x,y).

Esta es una representación gráfica de unos ejes cartesianos:



Los distintos ejes tienen nombres propios:

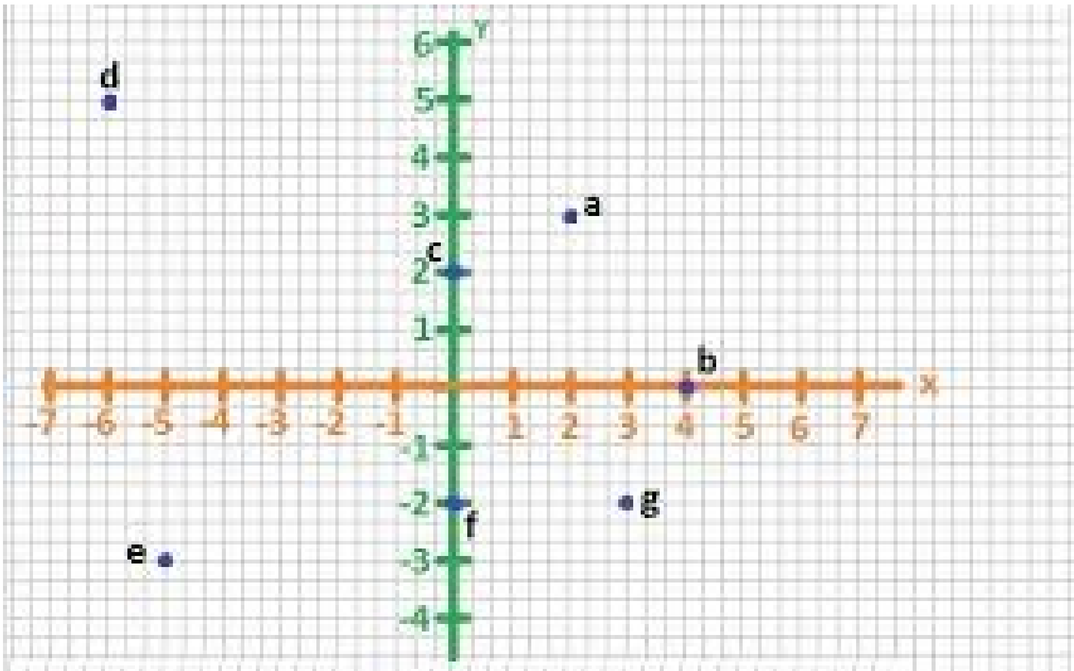
- El eje horizontal es el eje de abscisas (o de las equis).
- El eje vertical es el eje de ordenadas (o de las íes).

El punto donde se cortan los dos ejes se llama origen (O), y tiene por coordenadas

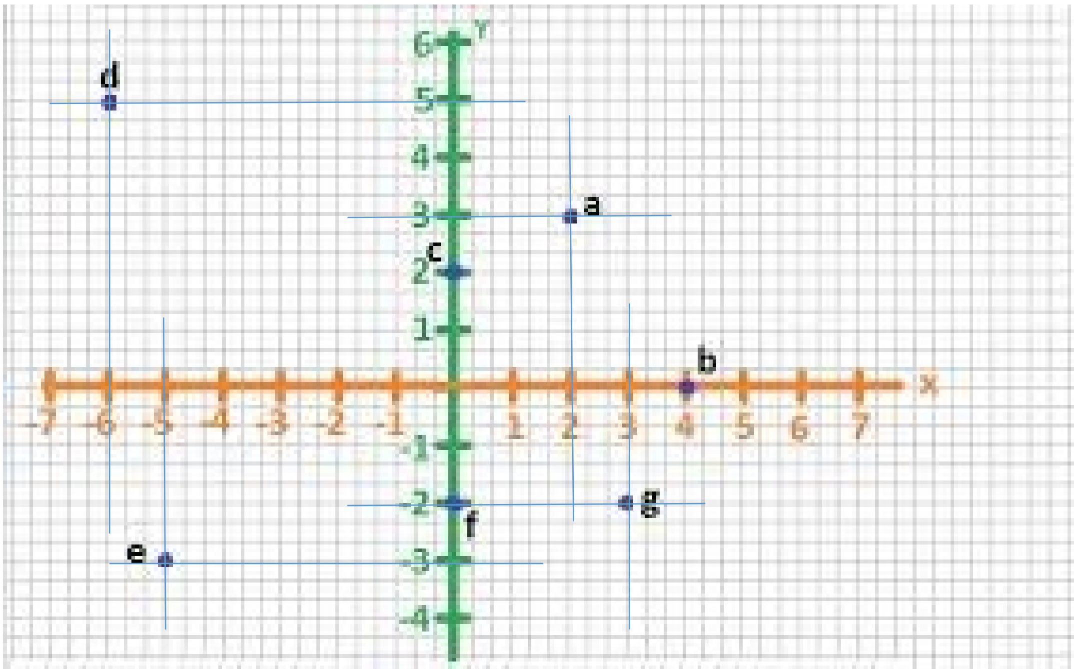
O = (0,0).

Desde el origen hacia la derecha son números positivos, hacia la izquierda negativos, hacia arriba positivos y hacia abajo negativos

Una vez vista la notación habitual, ya estamos en condiciones de localizar puntos. De entrada, por situación inicial tenemos el punto y los ejes de coordenadas:



Si trazamos rectas desde cada punto, tenemos:

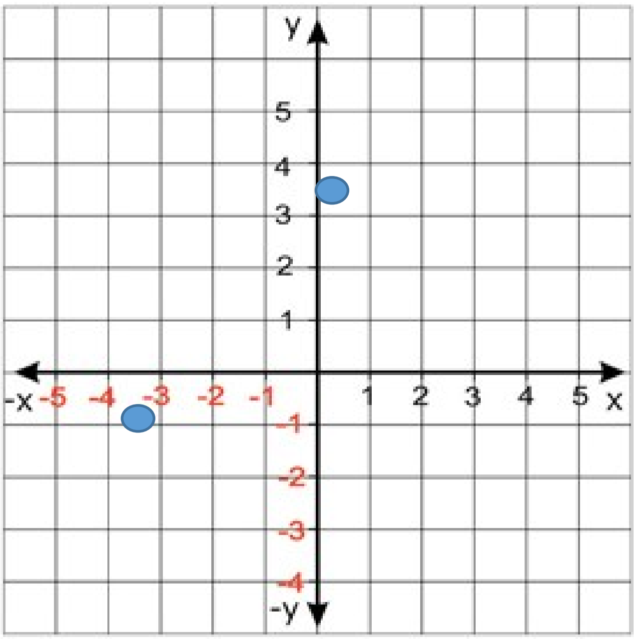


Por tanto:

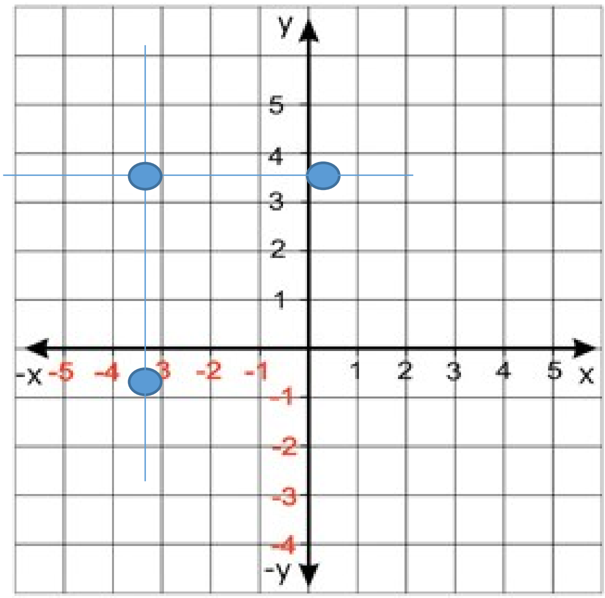
- a = (2,3)
- b = (4,0)
- c = (0,2)
- d = (-6,5)
- e = (-5,-3)
- f = (0,-2)
- g = (3,-2)

Supongamos que queremos representar el punto P (-3,4) en unos ejes cartesianos, el procedimiento a seguir es el siguiente:

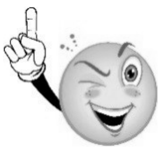
- Marcamos en el eje de abscisas el punto -3 y en el eje de ordenadas el punto 4:



- Trazamos paralelas a los ejes de ordenadas y abscisas por los puntos -3 y 4 respectivamente:



La intersección de dichas paralelas es el punto P (-3,4)



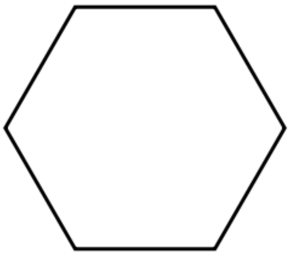
89. Representa en unos ejes de coordenadas los puntos A (-5,-4), B (-2,0), C (0,4), D (3,5), E (0,-3), F (2,0), G (5,5 , -2), H (-7,6).

Polígonos

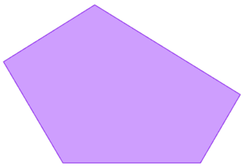
Definiciones

Un polígono es una figura geométrica plana limitada al menos por tres segmentos rectos consecutivos no alineados llamados lados.

- Un polígono se llama regular si todos sus lados tienen la misma longitud y todos sus ángulos interiores tienen la misma medida.

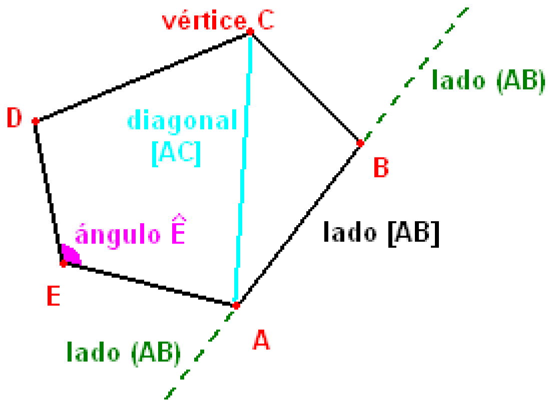


- Un polígono es irregular si incumple alguna de las dos condiciones del apartado anterior.



Estos son los elementos de un polígono:

- Lado: uno de los segmentos antes nombrados que delimita la superficie del polígono.
- Vértice: punto donde se unen dos segmentos de los que conforman el polígono.
- Diagonal: segmento que une dos vértices no adyacentes.
- Ángulo: apertura de los dos segmentos adyacentes que concurren en un vértice.



Polígono ABCDE

Notación

En el ejemplo anterior tenemos un polígono irregular de 5 lados (vértices). Vemos que cada vértice se denomina con una letra A, B, C, D, E. Podríamos seguir así con todas las letras que nos hicieran falta. No es necesario que estas letras sigan el orden del abecedario, sin embargo, es recomendable para facilitar la notación.

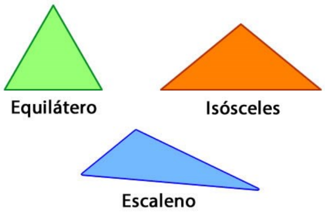
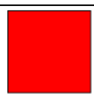
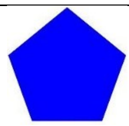
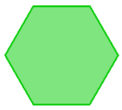
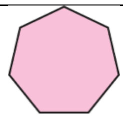
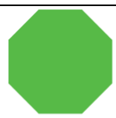
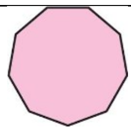
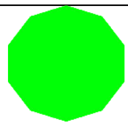
Los segmentos que unen dos vértices, los lados, se denominan con las letras correspondientes a los vértices que unen. Por ejemplo, el lado que une los vértices A y B se llamaría lado AB. Se intenta que al llamar a los lados las letras vayan en orden alfabético, pero no es estrictamente necesario. Si denominamos el segmento en sí lo haremos con un corchete, por ejemplo [AB] y si hablamos de la recta que pasa por los vértices lo denominaremos con un paréntesis, por ejemplo (AB).

Los ángulos se denotan con la letra correspondiente al vértice que acompañan, pero añadiendo un circunflejo sobre la letra. Por ejemplo, el ángulo asociado al vértice E se denota por Ê.

Las diagonales se denotan igual que los lados. Por ejemplo, la diagonal que une los vértices A y C se denota por [AC].

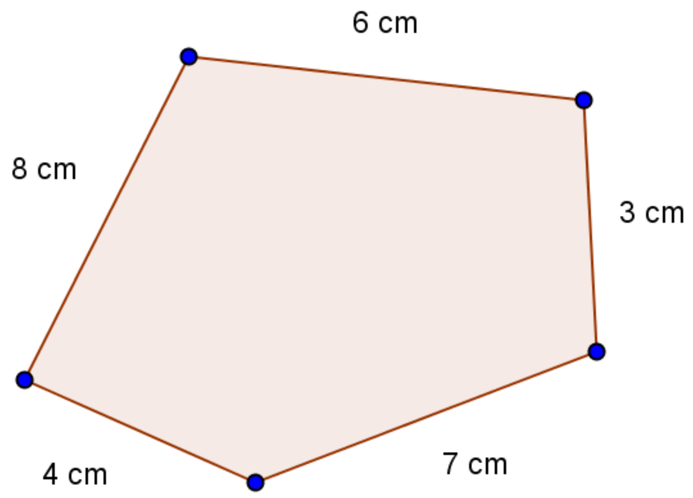
Clasificación

Veamos ahora la clasificación de los polígonos **regulares** según su número de lados:

Nombre	Número de lados	Figura
Triángulo	3	
Cuadrado	4	
Pentágono	5	
Hexágono	6	
Heptágono	7	
Octógono	8	
Eneágono	9	
Decágono	10	

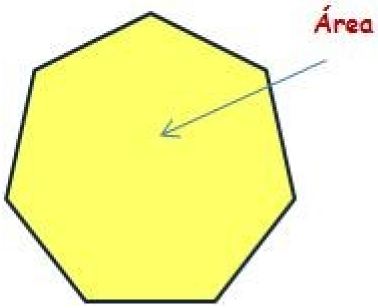
Perímetro y área

El perímetro de un polígono es la suma de las longitudes de todos sus lados.



En la figura anterior: p = 7 + 3 + 6 + 8 + 4 = 28 cm.

El área de un polígono es la medida de la región o superficie encerrada en su interior.

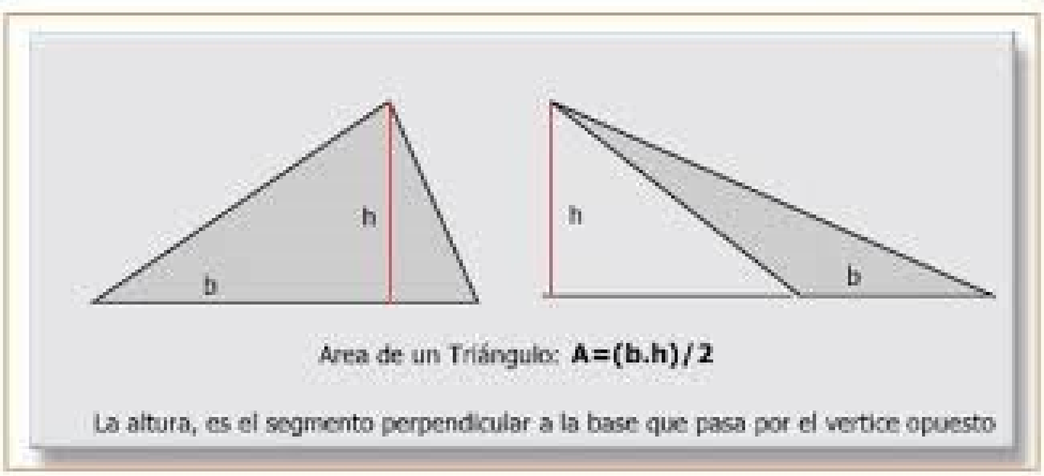


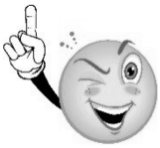
Área del triángulo

Clases de triángulos según sus lados

Área del triángulo

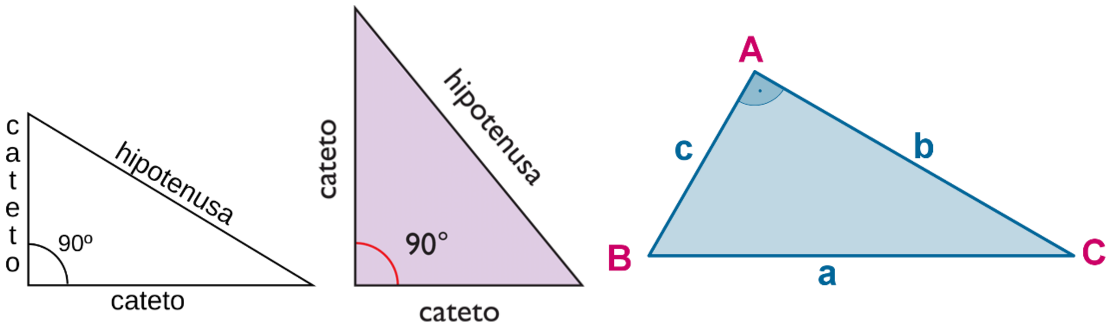
Es la base por la altura, dividido entre dos → A = $\frac{b \cdot h}{2}$



90. Calcula el perímetro y el área de un triángulo isósceles de b = 4 cm, de lado = 13 cm y de altura igual a 12,85 cm. Dibuja el triángulo.

El triángulo rectángulo y el teorema de Pitágoras

A un triángulo se le llama "triángulo rectángulo" si tiene un ángulo recto (90º); ejemplos de triángulos rectángulos son:



La hipotenusa es el lado opuesto al ángulo de 90º (es siempre el lado más largo) y a los otros dos lados se les llama catetos; normalmente, a la hipotenusa se le llama "a" y a los catetos "b" y "c".

El teorema de Pitágoras dice que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos:

$a^2 = b^2 + c^2$

Si despejamos la hipotenusa:

a = $\sqrt{b^2 + c^2}$

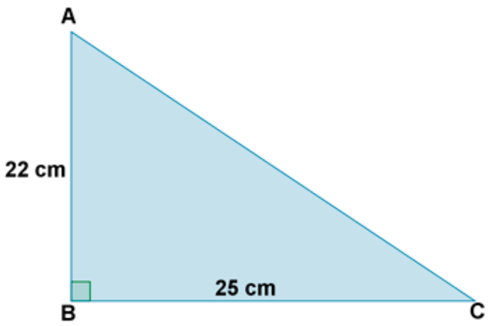
Del mismo modo, se pueden hallar los catetos:

$b^2 = a^2 - c^2 \rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$

$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$

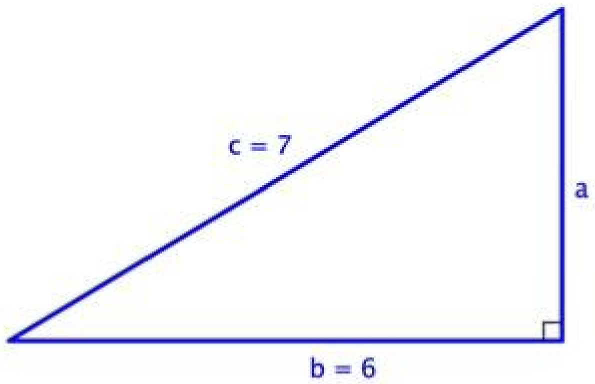
Pongamos un ejemplo:

Halla la hipotenusa en este triángulo:

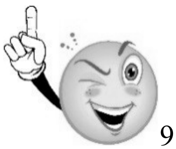


$a = \sqrt{22^2 + 25^2} = \sqrt{484 + 625} = \sqrt{1109} = 33{,}3$ cm

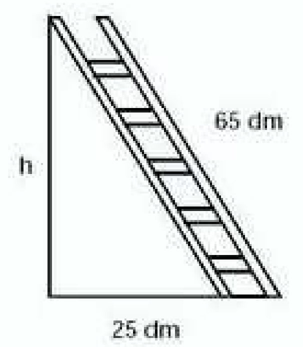
Halla el cateto que falta en este triángulo:



$a = \sqrt{7^2 - 6^2} = \sqrt{49 - 36} = \sqrt{13} = 3{,}6$

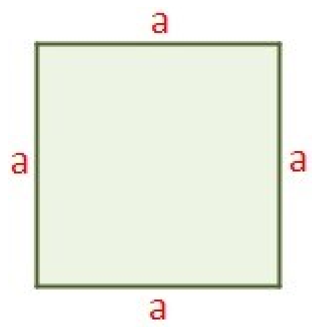


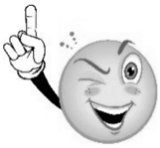
91. Una escalera de 65 dm de longitud está apoyada sobre la pared. El pie de la escalera dista 25 dm de la pared. ¿A qué altura se apoya la parte superior de la escalera sobre la pared? ¿A qué distancia de la pared habrá que colocar el pie de esta misma escalera para que la parte superior se apoye en la pared a una altura de 60 dm?



Área del cuadrado

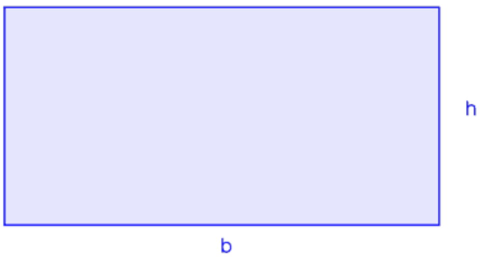
Es lado por lado, o lo que es lo mismo, lado al cuadrado → $A = l^2$

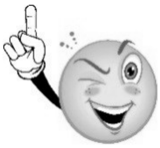



92. Halla el perímetro y el área de un cuadrado de l = 5 Km; dibuja el cuadrado.

Área del rectángulo

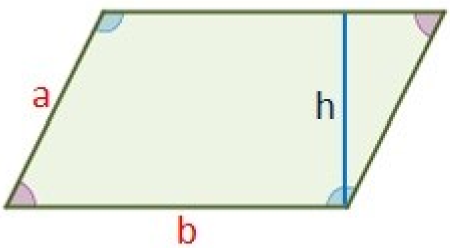
Es base por altura → $A = b \cdot h$

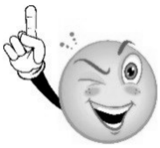



93. Halla el perímetro y el área de un rectángulo de b = 7 dm y h = 4 dm; dibuja el rectángulo.

Área del romboide

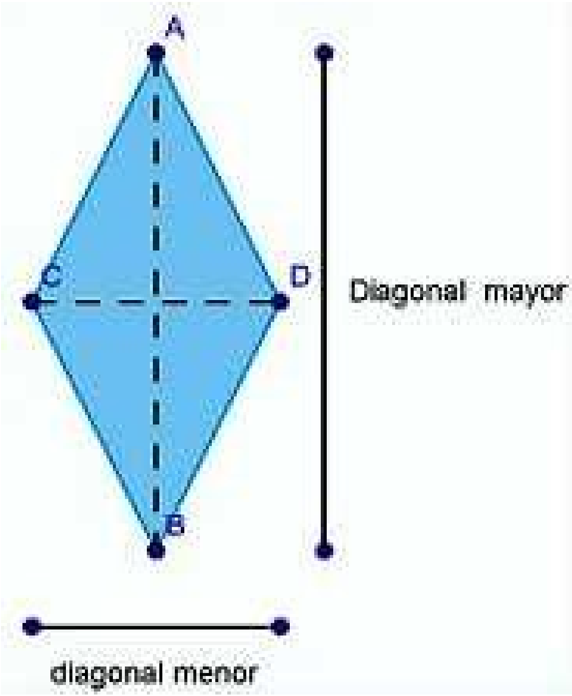
Es igualmente base por altura → $A = b \cdot h$

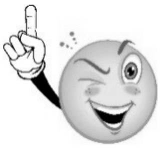



94. Halla el perímetro y el área de un romboide de b = 12 hm, de l = 5 hm y h = 4 hm; dibuja el romboide.

Área del rombo

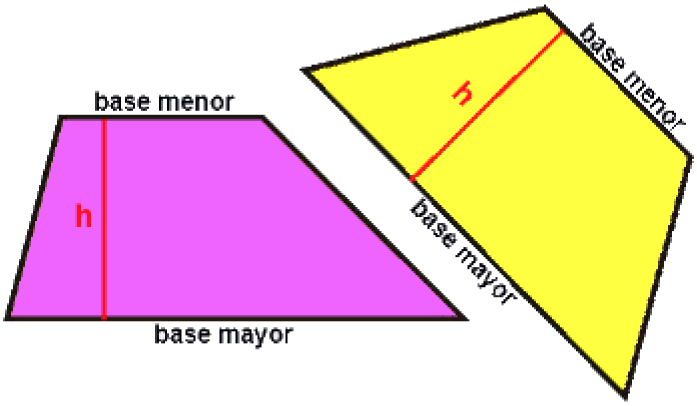
Es Diagonal mayor por diagonal menor partido por dos → A = $\frac{D \cdot d}{2}$

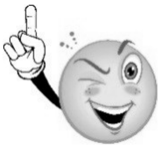



95. Halla el perímetro y el área de un rombo de D = 64 mm, de d = 26 mm y de l = 34,5 mm; dibuja el rombo.

Área del trapecio

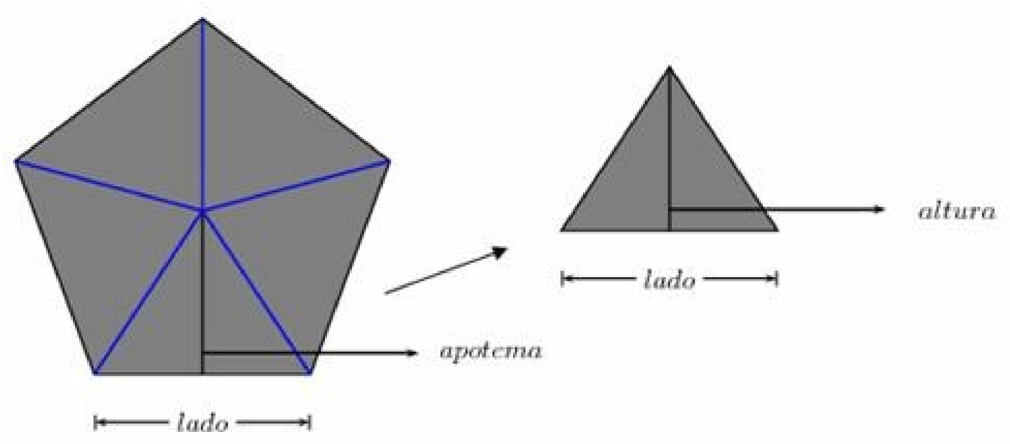
Es Base mayor más base menor, partido por dos, por la altura → A = $\frac{B+b}{2} \cdot h$

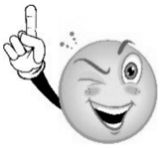


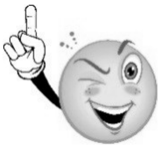

96. Halla el perímetro y el área de un trapecio isósceles de l = 5 km, con B = 8 km, b = 4 km. y h = 4,6 km; dibuja el trapecio.

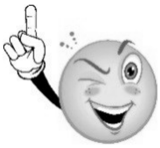
Área de un polígono regular de más de cuatro lados

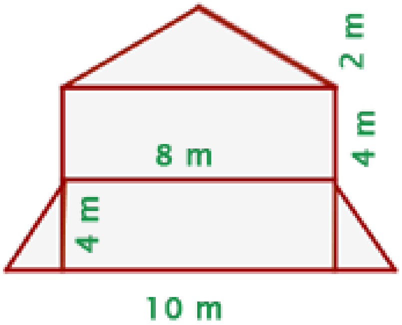
Es perímetro por apotema partido por dos → $A = \frac{p \cdot ap}{2}$

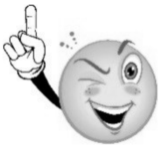



97. Halla el perímetro y el área de un hexágono regular de l = 6 m y ap = 5,2 m; dibuja el hexágono.


98. Calcula el número de árboles que pueden plantarse en un terreno rectangular de 32 m de largo y 30 m de ancho si cada planta necesita para desarrollarse 4 m².

99. Calcula la cantidad de pintura necesaria para pintar la fachada de este edificio sabiendo que se gastan 0.5 kg de pintura por m^2.



100. Una zona boscosa tiene forma de trapecio, cuyas bases miden 128 m y 92 m. La anchura de la zona mide 40 m. Se construye un paseo de 4 m de ancho perpendicular a las dos bases. Calcula el área de la zona arbolada que queda. Primero dibuja el problema.